



Facultad de Matemáticas

**FORMULARIO NORMALIZADO DE OFERTA DE LÍNEAS DE TRABAJOS FIN DEL MÁSTER  
UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS POR PARTE DE LOS DEPARTAMENTOS**

**Departamento de Matemática Aplicada II**

TFM (9 créditos)

TFM más Introducción al TFM (18 créditos)

**Líneas de trabajos ofertadas (11 en total) para el curso 2024-2025.**

**(1) Algoritmos de planificación óptima para sistemas *multi-drone*.**

*Tutores:* José Miguel Díaz Báñez, Vanesa Sánchez Canales y José Manuel Higes López.

*Breve descripción:* La necesidad del desarrollo de buenos algoritmos en el campo de robótica aérea propone nuevos problemas en algoritmia, optimización, geometría computacional y matemática discreta. Nuestro grupo ya tiene experiencia y proyectos nacionales y europeos donde se abordan estos problemas. En este marco de trabajo se plantearán diversas tareas de ingeniería matemática con aplicaciones reales en diversos campos como agricultura, logística, exploración de terrenos, etc.

*TFM más Introducción al TFM (18 créditos)*

**(2) Técnicas de *machine learning* para tareas con drones cooperativos**

*Tutor:* José Miguel Díaz Báñez e Inmaculada Ventura Molina

*Breve descripción:* Unos de los retos más importantes cuando queremos usar uno o un equipo de *drones* es poder ejecutar los algoritmos en tiempo real de vuelo. Los métodos tradicionales suelen requerir un alto tiempo computacional y no son aptos para usarlos online. Por ello, recientemente se están proponiendo algoritmos basados en redes neuronales y otras técnicas de aprendizaje que son eficientes y pueden ejecutarse de forma autónoma en el *dron* en tiempo real.

*TFM más Introducción al TFM (18 créditos)*



Facultad de Matemáticas

### **(3) Algoritmos eficientes para problemas de secuenciación de máquinas paralelas con necesidad de recursos adicionales**

*Tutor:* Federico Perea Rojas-Marcos

*Breve descripción:* La gestión de la cadena de suministro (SCM por sus siglas en inglés) trata de los diversos problemas que en ella aparecen, desde la obtención y almacenamiento de las materias primas, hasta la distribución y venta al cliente del producto manufacturado, pasando (entre otras) por la producción, que es la fase abordada en este proyecto.

Ya que todas esas fases están relacionadas entre sí, se podría pensar que el tratamiento integral de la SCM es el acercamiento apropiado. Desafortunadamente, la gran complejidad computacional de cada una de las fases de la SCM hace inabordable un acercamiento integral con la tecnología actual. Por ello se suele hacer un tratamiento separado de las diferentes fases: distribución, predicción, producción, etc.

Entre los múltiples problemas que se pueden incluir dentro del término 'producción', se encuentra la secuenciación de máquinas que trabajan en paralelo. La secuenciación, o *scheduling* en inglés, se ha convertido en las últimas décadas en un área de investigación que atrae a muchos investigadores a nivel mundial, tanto por el interés de sus problemas desde un punto de vista de optimización combinatoria, como por sus múltiples aplicaciones al sector industrial. En la actualidad, aparecen problemas de asignación y/o secuenciación en muchos ámbitos prácticos, como en plantas de producción, transporte, almacenes, etc.

La línea propuesta consiste la búsqueda de algoritmos eficientes para problemas de secuenciación con máquinas paralelas no relacionadas (*unrelated parallel machines scheduling* en inglés).

*Requisitos:* Conocimientos de optimización combinatoria y programación informática (en cualquier lenguaje).

*TFM más Introducción al TFM (18 créditos)*

### **(4) Algoritmos de optimización para la planificación de horarios de conductores en una empresa ferroviaria.**

*Tutor:* Federico Perea Rojas-Marcos

*Breve descripción:* Las empresas ferroviarias operan diariamente una gran cantidad de servicios, llamados bloques. Cada bloque consiste en una estación y una hora de salida, una estación y una hora de llegada, así como las máquinas que lo operan. La empresa quiere planificar los horarios de los conductores de tal forma que todos los bloques estén atendidos, al menor coste posible. Dada su



Facultad de Matemáticas

complejidad, resolver este problema es un reto importante. En esta línea se buscarán algoritmos eficientes que den una solución en un tiempo de cómputo razonable mediante modelos de programación matemática, algoritmos de descomposición, y algoritmos heurísticos.

*TFM más Introducción al TFM (18 créditos, pero también podría ser de 9)*

## **(5) Bifurcaciones locales y globales en sistemas dinámicos**

*Tutores:* Emilio Freire Macías y Marina Esteban Pérez

*Breve descripción:* En el estudio de la dinámica de sistemas no lineales, un objetivo es caracterizar la conducta de equilibrios y soluciones periódicas. La aparición de degeneraciones y la subsiguiente de bifurcaciones es un mecanismo útil para la consecución de dicho objetivo. El análisis mezcla instrumentos teóricos y simulaciones numéricas y se aplica a sistemas fuertemente no lineales en el campo de la física (mecánica celeste, cuántica, ...) y de la ingeniería (sistemas dinámicos y de control).

*TFM más Introducción al TFM (18 créditos)*

## **(6) Métodos de orden reducido para problemas de mecánica de fluidos.**

*Tutor:* Bosco García Archilla

*Breve descripción:* Los métodos de orden reducido son una técnica que se aplica en muchos campos con el fin de reducir el coste computacional de las llamadas simulaciones numéricas directas manteniendo un grado de precisión suficiente. Estas técnicas se han aplicado en los últimos años en la aproximación numérica de fluidos incompresibles. Dentro de estas técnicas se enmarcan los métodos POD (de sus siglas en inglés correspondientes a *proper orthogonal decomposition*). Los métodos POD proporcionan una base de dimensión pequeña en comparación con la dimensión de las bases de elementos finitos típicas en una simulación numérica. Las bases en los métodos POD se obtienen a partir de datos obtenidos de las simulaciones.

En esta línea se investigan procedimientos extender el uso de las bases POD a problemas con distintos valores de los parámetros (número de Reynolds, factores de forma, etc) de aquéllos en las simulaciones de las que se obtuvo la base POD.

*TFM más Introducción al TFM (18 créditos)*



Facultad de Matemáticas

## **(7) Existencia y unicidad de conexiones globales en sistemas lineales a trozos de dimensión tres.**

*Tutores:* Victoriano Carmona Centeno y Fernando Fernández Sánchez

*Breve descripción:* Una de las rutas que conducen al caos en un sistema dinámico es la aparición, para algún valor de los parámetros, de ciclos homoclinos y heteroclinos bajo ciertas condiciones sobre los autovalores de aquellos equilibrios en que se apoyan.

En general, la dificultad de probar la existencia de tales órbitas globales suele obligar al uso de herramientas computacionales. En sistemas lineales a trozos, sin embargo, hay técnicas que permiten, en determinadas circunstancias, realizar pruebas rigurosas de existencia y, lo que a veces es más importante, unicidad tanto local como global, en el espacio de fases y en el de parámetros. Además, las características de los problemas que aparecen con dichas técnicas no requieren el uso de elaboradas teorías matemáticas, sino que permiten extraer resultados interesantes con conocimientos básicos de álgebra lineal y cálculo de una o varias variables, eso sí, aplicados con precisión. En esta línea se pretende usar estos enfoques teóricos para detectar conexiones globales y analizar los comportamientos periódicos y caóticos que éstos pueden generar, en varios sistemas lineales a trozos.

*TFM más Introducción al TFM (18 créditos)*

## **(8) Análisis de sistemas dinámicos mediante una caracterización integral de la aplicación de Poincaré**

*Tutores:* Victoriano Carmona Centeno y Fernando Fernández Sánchez

*Breve descripción:* El estudio de la aplicación de Poincaré sobre secciones transversales al flujo es una de las herramientas básicas para analizar el comportamiento periódico y, más concretamente, de ciclos límite (órbitas periódicas aisladas) en sistemas dinámicos.

En el caso de sistemas regulares a trozos, hay una sección (la determinada por un hiperplano de separación de las distintas zonas de regularidad) que se usa automáticamente como sección de Poincaré, si bien la falta de transversalidad del flujo a toda esa sección introduce nuevos fenómenos de bifurcación respecto a los observables en sistemas regulares.

Más aún, en sistemas lineales a trozos, un requisito obvio para que una órbita del flujo pueda ser un ciclo límite es que atraviese alguna sección de separación de las zonas lineales. Por tanto, el interés en estas manifestaciones propias de los sistemas a trozos hace necesario manejar convenientemente la aplicación de Poincaré de las secciones de separación.



Facultad de Matemáticas

Los sistemas lineales a trozos tienen una peculiaridad que se ha usado casi siempre para su estudio y es la posibilidad de integrar explícitamente el flujo en cada una de dichas regiones de literalidad. Esta aparente ventaja tiene, desafortunadamente, dos debilidades que dificultan el análisis: por un lado, la integración explícita depende de los espectros de las matrices de cada una de las zonas de linealidad, lo que genera multitud de casos diferentes, que llevan a expresiones distintas y, por tanto, a la utilización de técnicas especializadas para cada caso; por otro lado, la integración lleva a términos no lineales complicados debidos a la aparición del tiempo de vuelo. Por resaltar algo más sobre estas debilidades digamos que, al tener que analizarse muchos casos distintos, es habitual perderse los aspectos comunes a todos ellos.

Recientemente, hemos desarrollado una forma alternativa de estudiar estos sistemas en el caso plano evitando la integración explícita. Todo se basa en usar una caracterización integral de la aplicación de Poincaré (basada en la construcción adecuada de integrales de línea sobre las órbitas del flujo). Es ahora, por tanto, el momento de obtener pruebas simples para resultados ya conocidos y mejorarlas en el aspecto de obtener resultados comunes e interpretaciones geométricas, que se han podido perder con el análisis caso a caso. Ese es uno de los objetivos que proponemos.

Para terminar, queremos comentar que en esta misma línea podríamos también plantear el estimulante trabajo de generalizar la caracterización integral para sistemas lineales a trozos planos a sistemas diferenciables a trozos de cualquier dimensión, lo que llevaría, de manera natural, al estudio de los llamados multiplicadores de Jacobi.

*TFM más Introducción al TFM (18 créditos)*

## **(9) Polinomios ortogonales y el problema del *time-and-band-limiting***

*Tutores:* Mirta M. Castro Smirnova e Ignacio N. Zurrián

*Breve descripción:* Los polinomios ortogonales constituyen un tema clásico, muy relacionado con la teoría de aproximación y el análisis numérico, con una creciente actividad de investigación hoy en día. En este campo se utilizan fundamentalmente técnicas del análisis funcional, el análisis complejo, la teoría de operadores, las ecuaciones diferenciales, el álgebra lineal y la teoría de probabilidad.

Dentro de esta área, y como objetivo del trabajo, se pretende profundizar en el llamado problema del *time-and-band-limiting* y su relación con la teoría de polinomios ortogonales, donde han surgido varios trabajos de investigación recientes. Este es un tema enmarcado dentro de la física-matemática, estrechamente vinculado con la teoría de la señal, que tiene sus orígenes en los trabajos de Henry Landau, David Slepian y Henry Pollack (Bell Labs) en los años sesenta, dando solución a un problema inicialmente planteado por Claude Shannon.

*TFM más Introducción al TFM (18 créditos)*



Facultad de Matemáticas

## (10) Juegos con incompatibilidades en la comunicación

*Tutor:* Andrés Jiménez Losada

*Breve descripción:* Un juego cooperativo pretende repartir un determinado valor obtenido por la colaboración de varios agentes entre ellos de forma justa. Los juegos con incompatibilidades estudian situaciones donde existen restricciones por falta de entendimiento entre parejas de jugadores. Dos modelos se han estudiado en la literatura, el último siguiendo la perspectiva de información a priori. Estas incompatibilidades vienen dadas usualmente mediante grafos. Se pretende analizar modelos similares usando información más compleja bien por hipergrafos o grafos difusos.

*TFM más Introducción al TFM (18 créditos)*

## (11) Espacios de Hardy de series de Dirichlet y operadores de composición

**Tutores:** Manuel Domingo Contreras Márquez y Luis Rodríguez Piazza

Las series de Dirichlet son una herramienta clásica en diversas ramas de Matemáticas cuyo máximo exponente es la función *zeta de Riemann* y otras funciones de vital importancia en Teoría de Números. Son las series que se pueden expresar como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

donde los  $a_n$  son coeficientes complejos y  $s$  es una variable compleja. Para toda serie de este tipo existe  $\sigma \in [-\infty, +\infty]$ , que llamamos *abscisa de convergencia*, tal que la serie de Dirichlet converge si la parte real de  $s$  es mayor que  $\sigma$  y no converge si su parte real es menor que  $\sigma$ . En el semiplano de convergencia la suma de la serie de Dirichlet define una función holomorfa.

Los espacios de Hardy de series de Dirichlet  $H^p$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ , fueron introducidos en [6] para  $p = 2$  y  $p = +\infty$ , y en [1] para los demás valores de  $p$ . Estos espacios están formados por funciones holomorfas definidas en el semiplano de abscisa  $\frac{1}{2}$ , y en el caso  $p = +\infty$  en el semiplano derecho. En [6] fueron usados para resolver un problema que, en principio, no tenía que ver con ellos: caracterizar las funciones cuyas dilatadas naturales forman una base de Riesz de  $L^2[0,1]$ .

En los últimos 25 años se han ido estudiando las propiedades de estos espacios, así como de diversas generalizaciones de ellos y de otros espacios de Banach de funciones analíticas representadas por series de Dirichlet. Se estudian los operadores de multiplicación, composición, medidas de Carleson, problemas de interpolación, operadores de Volterra, ... Muchas cuestiones han ido surgiendo y muchas aún están por resolver.



Facultad de Matemáticas

En el estudio de las series de Dirichlet y de estos espacios un ingrediente importante es lo que se conoce como *punto de vista de Bohr*, introducido en [2], es entender las series de Dirichlet como series de potencias en infinitas variables, asumiendo que, para los números primos  $P$  las funciones  $\{p^{-s}: p \in P\}$  se comportan como variables independientes. Esto se hace de forma rigurosa a través del “Bohr's lift”, dando lugar a la utilización de Análisis Armónico en el estudio de las series de Dirichlet.

El objetivo de este Trabajo Fin de Máster es que el alumno adquiera los conocimientos y técnicas necesarios para comprender y estar en disposición de poder atacar problemas actuales en el campo de los espacios de Hardy de series de Dirichlet y de los operadores de composición en ellos.

El **plan de trabajo** para la consecución de estos objetivos consistirá en ir proporcionando al alumno progresivamente los artículos de investigación y capítulos de libros que deben ser estudiados y analizados por él.

Se comenzará estudiando resultados sobre la convergencia de las series de Dirichlet y las propiedades generales de las series de Dirichlet. Estos aparecen en muchos textos clásicos, pero nosotros hemos elegido textos más modernos como [7] y [3]. Después se repasarán los espacios de Hardy del disco unidad, completando los resultados que el alumno verá en los cursos de máster con algunos del libro de Duren [4].

Luego se pasará al estudio de los artículos seminales sobre estos espacios: el de Hedenmalm, Lindqvist y Seip [6] en el que se repasará el problema sobre las dilatadas para cuya resolución se introdujeron los espacios de series de Dirichlet para  $p = 2$  y  $p = +\infty$ . Se completarán estos artículos con otras propiedades de los espacios que se pueden encontrar en [7] y [3].

Luego se estudiarán los operadores de multiplicación y de composición para el caso para  $H^2$ . El objetivo principal es determinar las funciones que inducen operadores de composición acotados. Este problema fue resuelto en [5] dando lugar a la que hoy se conoce como clase de Gordon-Hedenmalm. El objetivo más interesante de este proyecto es explicar y demostrar con claridad la caracterización de las funciones que pertenecen a esta clase de Gordon-Hedenmalm. También se podrían tratar algunos resultados de operadores de composición en  $H^p$  para otros valores de  $p$  diferentes de 2.

## Referencias.

- [1] F. Bayart, *Hardy spaces of Dirichlet series and their composition operators*, Monatshefte für Mathematik, **136**, 203--236 (2002).
- [2] H. Bohr, *Über die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variablen in der Theorie der Dirichletschen Reihen  $\sum \frac{a_n}{n^s}$* , Göttingen Nachr. **1913**, 441-488 (1913).
- [3] A. Defant, D. García, M. Maestre y P. Sevilla-Peris, *Dirichlet Series and Holomorphic Functions in High Dimensions*, volume **37** de *New Mathematical Monographs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2019.



Facultad de Matemáticas

- [4] P.L. Duren, *Theory of  $H^p$  spaces*, Dover publications, New York, 2000.
- [5] J. Gordon and H. Hedenmalm, *The composition operators on the space of Dirichlet series with square summable coefficients*, Michigan Mathematical Journal, **46**, 313-329 (1999).
- [6] H. Hedenmalm, P. Lindqvist and K. Seip, *A Hilbert space of Dirichlet series and systems of dilated functions in  $L^2[0,1]$* , Duke Math. J. **86**, 1-37 (1997).
- [7] H. Queffélec and M. Queffélec, *Diophantine Approximation and Dirichlet Series*, Second edition, Texts and Readings in Mathematics **80**, Hindustan Book Agency, New Delhi, Springer, Singapore, 2020.

TFM más Introducción al TFM (18 créditos)