



Facultad de Matemáticas

FORMULARIO NORMALIZADO OFERTA TRABAJOS FIN DE MÁSTER EN MATEMÁTICAS POR PARTE DE LOS DEPARTAMENTOS

TITULACIÓN: MASTER MUM-DOBLE MASTER MAES-MUM

Departamento: Análisis Matemático

TFM: (9 créditos) y TFM más Introducción al TFM (18 de créditos)

Profesores Tutores: M. Ángeles Japón Pineda

Título del trabajo ofertado: Medidas y Grupos Amenables.

Breve descripción del trabajo propuesto:

El objetivo del trabajo es desarrollar la teoría necesaria sobre grupos amenables que permitan encontrar una solución a ciertas paradojas relacionadas con la teoría de la medida.

El concepto de *grupo amenable* comienza con Lebesgue (1904) al estudiar si puede existir una medida definida en todos los subconjuntos de la recta real \mathbb{R} que sea numerablemente aditiva, invariante por traslaciones y que valga 1 en el intervalo $[0,1]$. Tras probarse que no puede existir tal medida positiva (Vitali, 1905), se aborda la existencia de una medida similar en \mathbb{R} relajando la hipótesis de numerablemente aditiva por finitamente aditiva, es decir, la medida de la unión de dos conjuntos disjuntos es la suma de las medidas.

Supongamos una situación más general: Sean E un conjunto arbitrario (digamos \mathbb{R}^n) y G un grupo actuando sobre los subconjuntos de E (digamos las traslaciones en \mathbb{R}^n). Buscamos una ‘medida’ normalizada, definida en cada subconjunto de E que sea aditiva y además invariante por la acción de G (la medida de A coincide con la medida de $g(A)$ para todo g en G).

J. von Neumann fue uno de los primeros matemáticos en darse cuenta que la existencia de una medida invariante por la acción de un grupo G depende más de las características propias de G que del conjunto donde está definida. El desarrollo de esta teoría da lugar a los **grupos amenables** y a una respuesta matemática de diversas paradojas, tales como la paradoja de Banach-Tarski (1924): existe una descomposición de la bola unidad de \mathbb{R}^3 en un número finito de piezas no solapadas, que pueden juntarse de nuevo de manera diferente para dar dos copias idénticas de la bola original.

En Sevilla, a 25 de octubre de 2021



Facultad de Matemáticas

FORMULARIO NORMALIZADO OFERTA TRABAJOS FIN DE MÁSTER EN MATEMÁTICAS POR PARTE DE LOS DEPARTAMENTOS

TITULACIÓN: MASTER MUM-DOBLE MASTER MAES-MUM

Departamento: Análisis Matemático

TFM más Introducción al TFM (18 de créditos) X

Profesores Tutores: M. Ángeles Japón Pineda

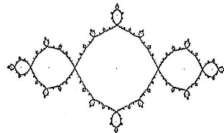
Título del trabajo ofertado: El “complejo” camino entre los fractales de Julia y el fractal de Mandelbrot

Breve descripción del trabajo propuesto: Consideremos la función en el plano complejo $f_c(z)=z^2+c$, donde c es una constante fija.

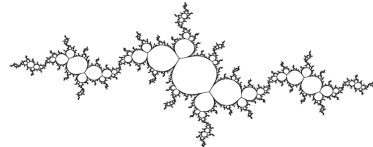
Los fractales de Julia surgen de estudiar los puntos z_0 del plano complejo \mathbb{C} para los cuales las iteradas

$$\{f^n(z_0)\}_n = \{f_c(z_0), f_c^2(z_0), f_c^3(z_0), \dots\}$$

forman una sucesión acotada en el plano. Para cada constante c se obtiene el correspondiente *conjunto de Julia*:



Conjunto de Julia para $c = -1$

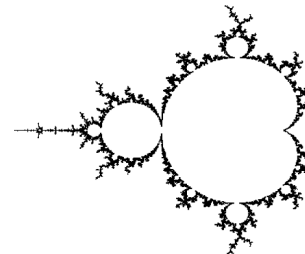


Conjunto de Julia para $c = -1.125 + i 0.21650635094611$

Consideremos de nuevo la misma función compleja $f_c(z)=z^2+c$ donde c es una constante del plano \mathbb{C} .

Fijemos el origen 0 como punto inicial y se estudia la acotación en el plano de la sucesión de iteradas $\{f_c^n(0)\}_n$.

Se define el fractal de Mandelbrot como los números del plano c para los cuales la sucesión anterior es acotada.



El objetivo del TFM será realizar un estudio sobre diferentes propiedades de estos conjuntos que dieron lugar a los inicios de la llamada “geometría fractal”, con el objetivo de probar el Teorema fundamental de Mandelbrot: un punto del plano c pertenece al conjunto de Mandelbrot si y solo si su correspondiente conjunto de Julia es conexo.



Facultad de Matemáticas

Recomendaciones:

Se recomienda conocimientos avanzados en Variable Compleja y en algún software que permita ilustrar los distintos fractales obtenidos gráficamente (por ejemplo Mathematica).

De modo ilustrativo, se aconseja dar un paseo por la web en busca de distintos conjuntos de Julia y de propiedades inesperadas del fractal de Mandelbrot.

En Sevilla, a 25 de octubre de 2021



Facultad de Matemáticas

FORMULARIO NORMALIZADO OFERTA TRABAJOS FIN DE MÁSTER EN MATEMÁTICAS POR PARTE DE LOS DEPARTAMENTOS

TITULACIÓN: MUM (18 créditos)

Departamento: Análisis Matemático

Profesores Tutores: M. Ángeles Japón Pineda, Genaro López Acedo

Título del trabajo ofertado: The subdifferential via normal cones in metric spaces with nonpositive curvature

Breve descripción del trabajo propuesto:

The subdifferential is the main analytic tool to deal with nonsmooth convex functions and it is supposed to replace the role of the differentiation in the first order for this class of mappings. In the case of linear spaces, framework where traditionally convex optimization has been developed, this notion has been approached from different points of view: via directional derivatives, via normal cone, via subdifferential inequality, and a very rich theory has been developed enclosing a coherent and complete subdifferential calculus (see for instance [3]).

Although convex analysis has been mainly developed in the realm of linear spaces, different tools and results of this fruitful research area have been considered in the setting of nonlinear spaces in the recent years [1]. In the proposed work, we will explore the normal cone with the goal of introducing the subdifferential in metric spaces of nonpositive curvature [2].

[1] M. Bacak, Convex analysis and optimization in Hadamard spaces, De Gruyter, Berlin, 2014.

[2] M.R. Bridson, A. Haefliger, Metric spaces of non-positive curvature, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[3] F.H. Clarke, Y.S. Ledyaev, R.J. Stern, P.R. Wolenski, Nonsmooth Analysis and Control Theory, Springer, Berlin, 1988.

En Sevilla, a 4 de noviembre de 2021