



Facultad de Matemáticas

FORMULARIO NORMALIZADO OFERTA TRABAJOS FIN DE MÁSTER EN MATEMÁTICAS POR PARTE DE LOS DEPARTAMENTOS

Departamento:

Análisis Matemático

Profesores Tutores:

María del Carmen Calderón Moreno y José Antonio Prado Bassas

Título del trabajo ofertado:

Contraejemplos en Análisis: Lineabilidad.

Tipo de trabajo:

Este trabajo se oferta en dos modalidades

Modalidad 1: Sólo TFM

Modalidad 2: TFM + Introducción al TFM

Breve descripción del trabajo propuesto:

En Análisis Real, incluso en primeros cursos de Grado, son numerosos los resultados que ofrecen condiciones suficientes para la obtención de propiedades sobre funciones u otros objetos matemáticos. Por ejemplo, la Regla de L'Hôpital nos permite calcular el límite de un cociente de funciones a través del cociente de sus derivadas; o el Criterio M de Weierstrass nos proporciona una herramienta para estudiar la convergencia uniforme de sucesiones de funciones. Sin embargo, las condiciones que nos dan estos resultados no son necesarias, y suelen ser poco conocidas las situaciones en las que no se pueden aplicar.

En el presente trabajo vamos a centrarnos en los recíprocos de los resultados anteriores y vamos a abordar la búsqueda de contraejemplos, así como el estudio de "cuántos" de ellos podemos encontrar. Para ello, introduciremos al alumno en la Teoría de la Lineabilidad. Esta rama, con gran auge en los últimos 20 años, se encarga de estudiar la existencia de espacios vectoriales y/o álgebras dentro de familias de objetos extraños, donde a priori esto no parece posible.

En la Modalidad 1 (sólo TFM) el trabajo consistirá en la lectura, comprensión y asimilación de varios artículos de investigación recientes sobre estos temas, desarrollo de los resultados contenidos en ellos y su presentación unificada por escrito.

En la Modalidad 2 (TFM+Introducción al TFM), además de lo anterior, se intentará conseguir algún resultado original en esta línea.

En Sevilla, a 3 de noviembre de 2020



Facultad de Matemáticas

FORMULARIO NORMALIZADO OFERTA TRABAJOS FIN DE MÁSTER EN MATEMÁTICAS POR PARTE DE LOS DEPARTAMENTOS

TITULACIÓN: MUM (18 créditos)

Departamento: Análisis Matemático

TFM (9 créditos) TFM más Introducción al TFM (18 de créditos) X

Profesores Tutores: M. Ángeles Japón Pineda

Título del trabajo ofertado: El Teorema de Punto Fijo de Ryll-Nardzewski y la existencia de la medida de Haar en grupos topológicos compactos.

Breve descripción del trabajo propuesto:

El objetivo principal del trabajo será probar el Teorema de punto fijo de Ryll-Nardzewski y obtener aplicaciones al Análisis Armónico, tales como la existencia de medidas de Haar en grupos topológicos compactos.

Dado G un grupo topológico compacto, una medida de Haar es una medida positiva, normalizada, regular de Borel, que es invariante (por la izquierda) por la acción de G , es decir, la medida de A coincide con la medida de gA para todo A subconjunto borel de G y para todo g elemento de G .

El Teorema de Punto Fijo de Ryll-Nardzewski es un teorema de punto fijo común para un conjunto de aplicaciones: dado un conjunto de aplicaciones definidas en un mismo dominio C cumpliendo determinadas propiedades, se busca x en C que sea punto fijo simultáneamente para todas las aplicaciones del conjunto.

Pongamos un ejemplo: Como consecuencia del Teorema de Bolzano se puede probar fácilmente que toda función continua $f:[0,1] \rightarrow [0,1]$ tiene un punto fijo. Sin embargo, existen ejemplos de funciones $f, g:[0,1] \rightarrow [0,1]$ continuas, que además conmutan, que no tienen un punto fijo en común (los ejemplos no son nada triviales). El Teorema de Ryll-Nardzewski (y otros anteriores) dan condiciones suficientes para que la situación anterior no ocurra.

Como todo buen teorema de punto fijo, las aplicaciones son muy variadas y en este caso estudiaremos como deducir la existencia de una medida de Haar en todo grupo topológico compacto (no necesariamente conmutativo).

En Sevilla, a 5 de noviembre de 2020

PROPUESTA DE TRABAJO FIN DE MÁSTER

Título: Operadores esencialmente normales

Tutor: Miguel Lacruz Martín

Descripción: Se dice que un operador A en un espacio de Hilbert es *esencialmente normal* cuando el operador $A^*A - AA^*$ es compacto. Un ejemplo de operador esencialmente normal es cualquier perturbación de un operador normal por un operador compacto, aunque hay otros operadores que no son de este tipo, como por ejemplo el operador *shift*.

Nuestro interés en esta clase de operadores surge de un trabajo de Víctor Lomonosov acerca de la existencia de subespacios invariantes no triviales para operadores esencialmente normales.

El objetivo de este proyecto es múltiple. Queremos por una parte profundizar en el teorema de Victor Lomonosov, que asegura que si un operador esencialmente normal A tiene la propiedad de que ni su conmutante ni el conmutante de su adjunto tienen una bola unidad relativamente compacta en la topología fuerte de operadores, entonces A posee un subespacio invariante.

Otro aspecto que queremos tratar es la normalidad esencial para un operador de composición inducido en el espacio de Hardy por una transformación bilineal del disco unidad. Un resultado de Bourdon, Levi, Narayan y Shapiro asegura que tal operador de composición es esencialmente normal de forma no trivial, es decir, que no es normal ni compacto, si y sólo si el símbolo que lo induce es parabólico pero no es un automorfismo.

Requisitos: Una base sólida de análisis complejo y análisis funcional.

Sevilla, 30 de octubre de 2020

Miguel Lacruz Martín